Programme de colle n°23

semaine du 30 mars au 3 avril

Notions vues en cours

Chapitre 30 : Applications linéaires (partie B) *en complément de la semaine précédente*

- **Forme linéaire**, espace dual noté E^*, forme linéaire e_i^* associée au i-ème vecteur de la base $(e_1,\cdots,e_n)$, base duale d'une base de E, si E est de dimension finie, E^* aussi et $\dim E^* = \dim E$
- **Hyperplan (vectoriel)** H de E : définition comme noyau d'une forme linéaire non nulle, H est un hyperplan ssi H admet une droite vectorielle comme supplémentaire ssi $\dim H = \dim E - 1$ (si E est de dimension finie)
- Deux hyperplans coïncident ssi leurs formes linéaires associées non nulles sont colinéaires, équation d'un hyperplan (en dimension infinie ou finie)
- L'intersection de m hyperplans est de dimension $\geq \dim E - m$, et tout espace de dimension exactement $\dim E - m$ peut s'écrire comme l'intersection de m hyperplans

Chapitre 31 : Matrices et applications linéaires

- **Matrice d'un vecteur** x selon une base $\mathcal{B}$ notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, matrice d'une famille de vecteurs $(u_1,\cdots,u_m)$ selon une base $\mathcal{B}$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1,\cdots,u_m)$
- **Matrice d'une application linéaire** $f\in\mathcal{L}(E,F)$ selon des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$, notation $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(f)$, pour un endomorphisme de E, on prendra les mêmes bases au départ et à l'arrivée et la matrice sera seulement notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$
- L'application $f\mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(f)$ est un isomorphisme d'e.v. Expressions des matrices de $f(x)$, de $\alpha f+\beta g$, de $g\circ f$
- f est inversible ssi il existe $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ telles que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(f)$ est inversible ssi pour toutes bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(f)$ est inversible, et dans ce cas $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}{}^{\mathcal{B}_F}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(f)^{-1}$
- Un morphisme f est un projecteur (resp. une symétrie) si et seulement si sa matrice A dans une base quelconque vérifie $A^2=A$ (resp. $A^2=I_n$)
- **Matrice de passage de** $\mathcal{B}$ **vers** $\mathcal{B}'$ notée $P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'} := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_E)$.
- $P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}$ est inversible et $(P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}) = P_{\mathcal{B}'}{}^{\mathcal{B}}$. Formules de changement de base pour un vecteur et pour un morphisme. Cas particulier d'un endomorphisme
- **Morphisme canoniquement associé à une matrice** A, noté en général f_A
- **Noyau et image d'une matrice**, définis par $\mathrm{Ker} A = \mathrm{Ker}(f_A)$ et $\mathrm{Im} A = \mathrm{Im}(f_A)$, caractérisations pour déterminer rapidement $\mathrm{Ker} A$ et $\mathrm{Im} A$ à partir d'un système linéaire utilisant la matrice A. $\mathrm{Im} A$ est l'e.v. engendré par les colonnes de A.
- **Rang d'une matrice** A, noté $\mathrm{rg} A$. Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible ssi son noyau vaut $\{0_{\mathbb{K}^n}\}$ ssi son image est $\mathbb{K}^n$ ssi son rang est n
- Matrices de dilation / permutation / transvection, inverses de ces matrices, effectuer une opération élémentaire sur les lignes (resp. colonnes) d'une matrice revient à multiplier à gauche (resp. à droite) par la matrice correspondante à cette opération élémentaire
- **Matrices équivalentes** : définition, c'est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, les opérations élémentaires préservent le rang
- Matrice J_r : définition, son rang est r ; Toute matrice A est équivalente à une (et une seule) matrice J_r avec $r=\mathrm{rg} A$, tout morphisme admet une matrice de la forme J_r pour matrice dans des bases bien choisies
- Deux matrices (de même taille) sont équivalentes ssi elles ont le même rang
- Le rang d'une matrice est égal au nombre de pivots sous forme échelonnée, ou encore à la dimension du s.e.v. engendré par ses colonnes (ou encore par ses lignes), $\mathrm{rg} A^\top = \mathrm{rg} A$

Les questions de cours sont en page suivante

Questions de cours

Question Flash. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur, sur laquelle on doit passer un temps minimal. Cette question est choisie parmi celles ci-dessous, après les questions longues (chapitres **28 à 30**).

Question Longue. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont exigibles. Les énoncés des définitions et théorèmes doivent être clairement... énoncés !*

1. Définition d'une forme linéaire, dimension de E^*, définition de la forme linéaire coordonnée e_i^*, et preuve que $(e_1^*, \cdots, e_n^*)$ est une base de E^* Chapitre 30, Encadrés 30.16 à 30.19
2. Montrer que l'application $\Phi : f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(f)$ est bijective. Sans démonstration : donner les formules qui donnent les matrices de $\alpha f + \beta g$, de $f(x)$, de $g \circ f$ et de f^{-1} (en précisant à quelle condition cette dernière formule est valide). Chapitre 31, Encadrés 31.4 à 31.7
3. Soit $x \in E$, $f \in \mathcal{L}(E,F)$,$\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (e'_1, \cdots, e'_n)$ une base de F.
   - Expliquer à quoi correspond un coefficient donné de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x)$.
   - Idem pour $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(f)$ et pour $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(g)$ si $g \in \mathcal{L}(E)$
   - Idem pour la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ avec $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E.
   - Sans démonstration : formule de changement de base pour un vecteur, un morphisme et pour un endomorphisme.

   Chapitre 31, Encadrés n° 1, 3, 8, 10, 12, 13, 14

Questions Flash au programme :

Chapitre 30 : (on suppose que E et F sont des $\mathbb{K}$-e.v. et $f \in \mathcal{L}(E,F)$)

- Soit p un projecteur sur un s.e.v. F parallèlement à un s.e.v. G. Que doivent vérifier F et G pour que cela ait un sens ? Que vaut alors $p(u)$ pour $u \in E$?
- Soit p un projecteur sur F parallèlement à G. Donner deux expressions de F et une expression de G qui font intervenir p.
- Compléter ces phrases : "Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Alors p est un projecteur ssi ..." et "Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. Alors s est une symétrie ssi ..."
- Soit s un projecteur sur un s.e.v. F parallèlement à un s.e.v. G. Que doivent vérifier F et G pour que cela ait un sens ? Que vaut alors $s(u)$ pour $u \in E$?
- Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. Que signifie l'assertion "f est une forme linéaire sur E" ?
- Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Que signifie "$(e_1^*, \cdots, e_n^*)$ est une base duale de $(e_1, \cdots, e_n)$" ?
- Que doit vérifier H pour être un hyperplan de E, si E est de dimension quelconque ?
- Que doit vérifier H pour être un hyperplan de E, si E est de dimension n ? Quelle est la dimension de E^* ?
- Soit $H_1 = \mathrm{Ker}\,\varphi_1$ et $H_2 = \mathrm{Ker}\,\varphi_2$ sont deux hyperplans, à quelle condition sur φ_1 et φ_2 a-t-on $H_1 = H_2$?
- Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. Donner une caractérisation de l'assertion "H est un hyperplan" qui fasse intervenir un supplémentaire.

Chapitre 29 : (on suppose que E et F sont des $\mathbb{K}$-e.v. et $f \in \mathcal{L}(E,F)$)

- Compléter : une application $f : E \to F$ est linéaire si : ....
- Donner les définitions ensemblistes de $\mathrm{Ker}\, f$ et de $\mathrm{Im}\, f$.
- À quelles conditions sur $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ est-ce que f est injective ? surjective ?
- Comment trouver une famille génératrice de $\mathrm{Im}\, f$ à partir d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E ?

- Soit $u : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ une application linéaire qui vérifie $u(1) = 3X$, $u(X) = 4X^2$ et $u(X^2) = 5$. Pourquoi est-ce que cela suffit à déterminer complètement u ? Exprimer $u(P)$ pour un polynôme quelconque $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$.
- Si E et F sont de même dimension finie, que peut-on dire si f est injective ?
- Que signifie que E et F sont des espaces isomorphes ? Si $\dim E = n$, quels sont les espaces isomorphes à E ?
- Soit $u_1, \cdots, u_n$ des vecteurs de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Quelle est la définition de $\operatorname{rg}(u_1, \cdots, u_n)$? de $\operatorname{rg} f$?
- Si E est de dimension finie, que peut-on dire sur le rang de f ? On attend deux propriétés.
- Si F est de dimension finie, que peut-on dire sur le rang de f ? On attend deux propriétés.
- Que peut-on dire du rang de $g \circ f$ en fonction des rangs de f et de g ?
- Énoncer le théorème du rang.

Chapitre 28 : (on suppose que E est un $\mathbb{K}$-e.v.)

- Compléter avec “libre”, “liée” ou “génératrice” : toute sur-famille d’une famille ...... est encore ...... (plusieurs mots peuvent convenir)
- Compléter avec “libre”, “liée” ou “génératrice” : toute sous-famille d’une famille ...... est encore ...... (plusieurs mots peuvent convenir)
- Énoncer les théorèmes de la base incomplète et de la base extraite.
- À quelle condition est-ce qu’un ensemble E est dit de dimension finie ? Comment définit-on alors la dimension de E, càd l’entier $\dim E$?
- Donner la dimension de l’e.v. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et écrire trois matrices issues de sa base canonique.
- Donner la dimension de $\mathbb{K}^n$ et écrire trois vecteurs issus de sa base canonique. De plus, quelle est la dimension de $E \times F$?
- Si $\dim E = n$, que peut-on dire sur le cardinal d’une famille libre de E ? On attend deux propriétés.
- Si $\dim E = n$, que peut-on dire sur le cardinal d’une famille génératrice de E ? On attend deux propriétés.
- On suppose E de dimension finie et F un s.e.v. de E. Que peut-on dire sur les dimensions de F et de E ? On attend deux propriétés.
- Soit F, G deux s.e.v. de E. Que doit vérifier une base $\mathcal{B}$ pour être une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$? Comment obtenir une telle base ?
- Énoncer la formule de Grassman pour deux s.e.v. F et G. Que devient cette formule si F et G sont en somme directe ?
- Soit E un e.v. et F, G deux s.e.v. de E. Donner 3 caractérisations de $F \oplus G = E$.